

**ЯРУЛЛИНА АЛИНА РАШИДОВНА**

**«СОВЕРШЕННЫЕ ЙОНСОНОВСКИЕ ПОЛИГОНЫ И ИХ  
ФРАГМЕНТЫ»**

**АННОТАЦИЯ**

**Диссертации, представленной на соискание степени доктора  
философии (PhD) по образовательной программе 8D05401 -  
Математика**

**Актуальность темы.** Теория моделей является одним из важных разделов фундаментальной математики, и представляет интерес для изучения современными исследователями, более того, по последним полученным результатам прослеживается положительная динамика ее развития и становится несомненно, что эта дисциплина будет играть важную роль в будущем математических наук. Необходимо отметить, что классическая теория моделей исследует в большей степени полные теории. Йонсоновские теории формируют подкласс индуктивных теорий и, как правило, являются не полными. Однако, они выделяют достаточно широкий класс классических алгебр, таких как группы, абелевы группы, поля фиксированной характеристики, булевы алгебры, полигоны и др. Один из классиков теории моделей, математик-логик Х.Дж. Кислер, в своей обзорной статье «Основы теории моделей» ("Fundamentals of Model Theory") в четырехтомной монографии «Справочная книга по математической логике», (под редакцией Барвайса), определил базовые понятия и направления развития теории моделей. Х.Дж. Кислер отметил два основных подхода в развитии теории моделей, а именно «западную» и «восточную» теорию моделей. Разделение было выполнено с учетом того, что один из основателей А. Тарский жил на западном берегу США с 1940, и А. Робинсон жил на восточном берегу с 1967. Это разделение давно потеряло свою географическую значимость, но оно полезно с математической точки зрения.

«Западная» теория моделей развивалась в традициях Скулема и А. Тарского. Оно в основном мотивировалось решением задач теории чисел, математического анализа и теории множеств, она использует все формулы логики первого порядка.

«Восточная» теория моделей развивалась в традициях А. Робинсона. Развитие данного направления мотивировалось задачами абстрактной алгебры, где формулы теорий обычно имеют в большинстве своем два набора кванторов. Оно обращает особое внимание на множество бескванторных и экзистенциальных формул.

Йонсоновские теории как объект исследования были рассмотрены в работе Йонсона, а также в работе Морли и Вота. В середине 80-х 20

столетия, работы Т.Г. Мустафина выделяют новое направление изучения йонсоновских теорий. В частности, он определил естественный подкласс йонсоновских теорий, который он назвал совершенными йонсоновскими теориями. Основным методом его исследования состоял в изучении свойств произвольных йонсоновских теорий с помощью переноса свойств их центров (элементарная теория семантической модели) на рассматриваемые йонсоновские теории. С другой стороны, одной из слабых сторон в изучении йонсоновских теорий в рамках предложенного Т.Г. Мустафиным метода было существование дополнительной аксиомы о существовании сильно недостижимого кардинала к аксиомам Цермелло-Френкеля теории множеств в определении семантической модели. Стоит отметить, что в течение доклада Р.М. Оспанова, представленного на «5-ый Казахско-французском коллоквиум по теории моделей», известные эксперты в области теории моделей Е.А. Палютин и Б. Пуаза заметили необходимость изменения этого определения. Реализация данного замечания была отражена в работе Е.Т. Мустафина, в котором он переопределил понятие  $k$ -однородности и семантической модели. Соответственно, модифицированное определение совершенности йонсоновской теории появилось в работе, в которой главные результаты, полученные ранее, были представлены повторно в рамках нового определения.

Результаты, обсужденные выше, относятся к «восточной» теории моделей. Т.Г. Мустафин описал обобщенные йонсоновские теории булевых алгебр. В дальнейшем изучении йонсоновских теорий были определены некоторые новые классы позитивных йонсоновских теорий.

Изучение любой алгебраической системы тесно связано с изучением ее элементарной теории. Поскольку мы работаем в рамках йонсоновских теорий, которые, вообще говоря, неполны, нам необходимо в первую очередь вспомнить результаты, полученные для полной теории унарков. Напомним, что унар – это структура сигнатуры, содержащей единственный унарный функциональный символ.

Ю.Е. Шишмарев получил фундаментальные результаты в этой области. В 1972, Ю.Е. Шишмарев доказал три теоремы, связанные с полной теорией унарков с бесконечными моделями. Автор определил условия, которые должны быть выполнены для ограниченной теории, чтобы она была категоричной в счетной и несчетной мощности и для неограниченной теории, чтобы она была категоричной в несчетной мощности. А.А. Иванов доказал, что элементарная теория унарков разрешима. А.А. Иванов также получил результаты о сильно ультраоднородном унаре; этот результат связан с определением критерия допускания элиминации кванторов в полной теории унарков, в элементарной теории унарков, также как и с фактом о том, что каждая полная ограниченная или не ограниченная теория унарков, которая имеет бесконечные модели, не конечно аксиоматизируема. А.Н.

Ряскин посчитал число моделей полных теорий унарных и, в одной из своих работ по той же тематике получил свойства конечного покрытия для полной теории унарных.

Интерес представляют работы Лео Маркуса, более специфично, та, в которой он получил критерий для случая, когда модель  $M$  языка  $L_1$  минимальная и состоит из простых или не простых компонентов.  $L_1$  состоит из унарного функционального символа и предикатного символа (равенство). Автор получил значимые результаты об отношениях между двумя компонентами, то есть, условия эквивалентности и критерий дизъюнктивного объединения.

Изучение йонсоновских теорий унарных начинается с работ Т.Г. Мустафина. Характеристика семантической модели унарных была получена в совместных работах Ешкеева А.Р. и Мустафина Т.Г., также как и показано, что йонсоновская теория унарных совершенна.

Чтобы описать некоторый класс частных алгебраических систем, определенных в соответствующем теоретико-модельном языке, может не существовать характеристики в соответствующем языке.

Важно заметить, что теория всех унарных – йонсоновская теория полигонов над циклическим моноидом. В частном случае, можно рассмотреть модели такой теории в форме алгебраической системы  $\{M; f_\alpha\}_{\alpha \in M}$ , то есть  $M \times M \rightarrow M$ , где  $M$  – это циклический моноид и выполняются следующие свойства:  $f_e(a) = a$  для  $e \in M$  и для всех  $a \in M$ ;  $f_{\alpha\beta}(a) = f_\alpha(f_\beta(a))$  для всех  $a \in M$  и всех  $\alpha, \beta \in M$ .

Моноид с одним порождающим элементом называется циклическим. Любой циклический моноид ведет себя либо как циклическая группа, либо получен путем внешнего включения единицы к циклической полугруппе.

Изучение полигонов над моноидом и полигонов над группой, до проведенного диссертационного исследования, проводилось в рамках рассмотрения их полных теорий. Как было указано выше, йонсоновские теории, вообще говоря, не полны. Несмотря на наличие описания унарных в рамках полных теорий, о неполных теориях унарных известно только, что теория всех унарных неполна. Поскольку исследование йонсоновских теорий позволяет получать абсолютно новые результаты, неизвестные еще в классической теории моделей, актуальность данной работы является обоснованной.

**Цель работы.** Основной целью диссертационной работы является исследование теоретико-модельных свойств йонсоновских теорий полигонов, а также классов их моделей. Под йонсоновскими теориями полигонов понимаем: экзистенциально позитивные мустафинские теории полигонов над группой; робинсоновские теории универсалов унарных и робинсоновские теории неориентированных графов; йонсоновские теории примитивов ( $\forall\exists$ -следствий) унарных в новой сигнатуре, обогащенной

унарным предикатным символом, выделяющим экзистенциально замкнутую модель, и символами констант.

**Задачи исследования.**

1. Найти критерий косемантичности семантических моделей классов йонсоновских ЭРМ-теорий полигонов над группой множества  $PSp(K_{\Pi})/\aleph_{ЭРМ}$ .

2. Описать классы косемантичности множества  $RSp(J\mathbb{C}_U)/\aleph$  (робинсоновский спектр йонсоновского семантического квазимногообразия робинсоновских унаров) и соответствующих характеристик их семантических моделей  $\mathbb{C}_{\Delta} \in J\mathbb{C}_U$ .

3. Описать классы косемантичности множества  $RSp(J\mathbb{C}_U)/\aleph$  (робинсоновский спектр йонсоновского семантического квазимногообразия робинсоновских унаров)  $\omega$ -категоричных робинсоновских теорий унаров.

4. Описать йонсоновские примитивы унаров в сигнатуре, расширенной новым унарным предикатным символом  $P^1$ , выделяющим экзистенциально замкнутую модель в семантической модели йонсоновского примитива унаров и символами констант.

**Объект исследования.** Совершенные йонсоновские теории полигонов над группой, совершенные йонсоновские теории полигонов над циклическим моноидом и классы их моделей.

**Методы исследования.** В процессе исследования был использован семантический метод, который характеризуется переносом свойств центра йонсоновской теории на саму эту теорию. Помимо этого, были применены методологии изучения из классической теории моделей и универсальной алгебры.

**Основные положения.** В работе получены следующие новые научные результаты:

1. Критерий косемантичности семантических моделей классов йонсоновских ЭРМ-теорий полигонов над группой множества  $PSp(K_{\Pi})/\aleph_{ЭРМ}$  (теорема 1.4.6).

2. Описание классов косемантичности множества  $RSp(J\mathbb{C}_U)/\aleph$  (фактор-множество робинсоновского спектра йонсоновского семантического квазимногообразия робинсоновских унаров по отношению косемантичности) и соответствующих характеристик их семантических моделей  $\mathbb{C}_{\Delta} \in J\mathbb{C}_U$  (теорема 2.2.1).

3. Описание классов косемантичности множества  $RSp(J\mathbb{C}_U)/\aleph$  (робинсоновский спектр йонсоновского семантического квазимногообразия робинсоновских унаров)  $\omega$ -категоричных робинсоновских теорий унаров (теорема 2.3.7).

4. Описание йонсоновские примитивы унаров в сигнатуре, расширенной новым унарным предикатным символом  $P^1$  выделяющим

экзистенциально замкнутую модель в семантической модели йонсоновского примитива унаров, и символами констант (теорема 2.5.8).

**Описание основных результатов исследования.** В первом разделе диссертационной работы отражены основные определения и теоремы классической теории моделей, а также результаты исследования, связанные с изучением понятия йонсоновского спектра фиксированного класса моделей сигнатуры полигонов, предполагается, что группа действует как моноид в полигонах. Понятие йонсоновского спектра является эффективным, когда производится описание теоретико-модельных свойств классов алгебр, теории которых допускают свойства совместного вложения и амальгамы. Обычно достаточно рассматривать универсально-экзистенциальные предложения, истинные на моделях этого класса. До представленной в первом разделе диссертационной работы информации, йонсоновский спектр имел дело только с йонсоновскими теориями. Однако изучение данного понятия позволило определить позитивный йонсоновский спектр, элементами которого могут быть не йонсоновские теории. Это происходит по причине того, что в определении экзистенциально позитивных мустафинских теорий, рассмотренных в данном разделе, задействованы не только изоморфные вложения, но и также погружения. В связи с этим в определениях свойств совместного вложения и амальгамы используются погружения. В итоге, полученные теории не обязательно будут йонсоновскими. Можно заметить, что вышеописанный подход к изучению йонсоновского спектра является оправданным, так как даже в случае не йонсоновских теорий существует регулярный метод для нахождения йонсоновской теории, удовлетворяющей известным ранее понятиям и результатам, но это будет также прямо относиться к рассматриваемой экзистенциально позитивной мустафинской теории.

Второй раздел диссертационной работы посвящена изучению семантического йонсоновского квазимногообразия универсалов унаров, то есть структур сигнатуры, содержащей единственный одноместный функциональный символ и неориентированных графов сигнатуры, содержащей бинарный предикатный символ. Были определены новые понятия семантического йонсоновского квазимногообразия робинсоновских унаров  $J\mathcal{C}_U$  и его элементарной теории. Для того чтобы доказать основной результат статьи был рассмотрен робинсоновский спектр  $RSp(J\mathcal{C}_U)$  и его разбиение на классы эквивалентности  $[T_U]$  по отношению косемантической. Была проанализирована характеристика особенностей таких классов эквивалентности  $[T_U] \in RSp(J\mathcal{C}_U)$ . Основным результатом — это следующая теорема существования: характеристики каждого класса  $[T_U]$ , состоящего из робинсоновских теорий унаров; класса  $[T_U]$  для какой-либо произвольной характеристики; критерий эквивалентности двух классов  $[T_{U_1}], [T_{U_2}]$ . Далее были рассмотрены

робинсоновские спектры  $RSp(JC_U)$  (робинсоновский спектр семантического йонсоновского квазимногообразия робинсоновских унаров) и  $RSp(JC_G)$  (робинсоновский спектр семантического йонсоновского квазимногообразия робинсоновских неориентированных графов) и их разбиение на классы эквивалентности  $[T_U]$  и  $[T_G]$  по отношению косемантической. Главные результаты данного исследования влекут за собой следующие полезные следствия: счетно категоричные робинсоновские теории унаров тотально категоричны; счетно категоричные робинсоновские теории неориентированных графов тотально категоричны. Второй раздел также позволяет рассмотреть теорию всех унаров и класс экзистенциально замкнутых моделей этой теории. Была рассмотрена расширенная сигнатура унаров, с помощью добавления нового символа одноместного предиката, выделяющего экзистенциально замкнутую модель в семантической модели йонсоновской теории унара, и нового константного символа. Были получены некоторые результаты, касающиеся универсалов и примитивов экзистенциально замкнутых йонсоновских унаров рассматриваемой теории.

**Обоснование новизны и важности полученных результатов.** Как следует из вышеперечисленного, проблема описания йонсоновских теорий алгебраических систем, что является основополагающей задачей тематики диссертационной работы, является актуальной. При исследовании данной проблемы были использованы новые понятия йонсоновского, в частности робинсоновского, спектра и йонсоновского семантического квазимногообразия. Более того, основной результат первого раздела исследования связан как с йонсоновскими теориями позитивного йонсоновского спектра, так и с не йонсоновскими. Ранее подобные случаи рассмотрены не были. Работа носит теоретический характер, и ее практическая значимость оценивается прикладным значением теории моделей. Выполненное исследование является фундаментальным и вносит существенный научный вклад в развитие математических наук.

**Апробация полученных результатов.** Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих международных конференциях и научных семинарах по профилю диссертации:

- Было произведено выступление с докладом на тему «Existentially positive Mustafin theories of S-acts over a group» на традиционной международной апрельской конференции в честь Дня работников науки Республики Казахстан. (Институт математики и математического моделирования, Алматы, 6-8 апреля 2022 г.);

- Выступление на международной научной конференции актуальные задачи математики, механики и информатики, посвященной 80-летию профессора Т.Г. Мустафина с докладом на тему «The perfect Jonsson S-acts» (Карагандинский университет им. академика Е.А. Букетова, Караганда, 8–9 сентября 2022 г.);

- Выступление на третьих международных научных Таймановских чтениях на тему «Современная математика: проблемы и приложения», посвященной 85-летию Кызылординского университета имени Коркыт Ата с докладом на тему «Позитивный йонсоновский спектр ЭРМ-теорий полигонов над группой» (Кызылординский университет имени Коркыт Ата, Кызылорда, 25 ноября 2022 г.);

- Результаты были апробированы в виде доклада на тему «On countable categoricity of semantic Jonsson quasivarieties of unars and graphs» на традиционной международной апрельской конференции в честь Дня работников науки Республики Казахстан (Институт математики и математического моделирования, Алматы, 5-7 апреля 2023 г.);

- Выступление с докладом «On Robinson spectrum of the semantic Jonsson quasivariety of unars» на традиционной международной апрельской конференции в честь Дня работников науки Республики Казахстан (Институт математики и математического моделирования, Алматы, 5-7 апреля 2023 г.);

- Выступление на научном семинаре «Теория моделей» им. Е.А. Палютина, Институт математики имени С.Л. Соболева (Новосибирск, Россия) совместно с Институт математики и математического моделирования (Алматы, Казахстан) с тематикой «Робинсоновский спектр семантического йонсоновского квазимногообразия унаров» (10 мая 2023 г.)

- Выступление с докладом на тему «On semantic Jonsson quasivariety of Robinson unars» на 7-м всемирном конгрессе математиков тюркского мира (TWMS Congress-2023) (Туркестан, 20-23 сентября 2023 г.);

- Результаты были апробированы в виде доклада на тему «On semantic Jonsson quasivariety of undirected graphs» на 7-м всемирном конгрессе математиков тюркского мира (TWMS Congress-2023) (Туркестан, 20-23 сентября 2023 г.);

- Выступление с докладом на тему «On  $\Delta$ -Jonsson spectrum of  $\Delta$ -PJ-theories» на традиционной международной апрельской конференции в честь Дня работников науки Республики Казахстан (Институт математики и математического моделирования, Механико-математический факультет Казахского национального университета имени аль-Фараби, Алматы, 5-7 апреля 2024);

- Результаты были апробированы в виде докладов на тему «On quantity of equivalence classes of Robinson spectrum of unars» и «On characteristic of equivalence classes of Robinson spectrum regarding their primitive» на традиционной международной апрельской конференции в честь Дня работников науки Республики Казахстан (Институт математики и математического моделирования, Механико-математический факультет Казахского национального университета имени аль-Фараби, Алматы, 5-7 апреля 2024);

- Выступление с докладом в период проведения 16-й международной летней школы-конференции «Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры» (Институт математики имени С.Л. Соболева, 8-13 июля 2024 г.).

**Соответствие направлениям развития науки или государственным программам.** Тема диссертационного исследования соответствует приоритетному направлению развитию «Научные исследования в области естественных наук», специализированное научное направление «Фундаментальные и прикладные исследования в области математики, механики, астрономии, физики, химии, биологии, информатики и географии».

Работа выполнена в рамках грантового финансирования по научным и научно-техническим проектам Комитета науки МНВО РК по темам:

1. «Классы косемантической и их классы моделей», ИРН AP09260237 на 2021-2023гг.;

2. «Фрагменты определимых подмножеств семантической модели фиксированной теории», ИРН AP23489523 на 2024-2026гг.

**Публикации.** Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 14 работах, из них: 3 статьи в журнале, входящем в базу данных Scopus (Перцентиль 46), 1 статья опубликована в журнале, рекомендованном Комитетом по обеспечению качества в сфере науки и высшего образования Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан, 10 работ – в материалах международных научных конференций.

**Описание вклада докторанта в подготовку каждой публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 4 работах: 3 статьи в журнале, входящем в базу данных Scopus (Перцентиль 46), 1 статья опубликована в журнале, рекомендованном Комитетом по обеспечению качества в сфере науки и высшего образования Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан. Вклад докторанта в подготовку каждой публикации состоял в проведении анализа литературного фонда, соответствующего тематике исследования, формулировке основных и вспомогательных результатов, проведения их доказательств.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из 62 страниц и следующих структурных элементов: введение, два раздела, заключение, список использованных источников.

**Количество использованных источников:** 57.

**Ключевые слова.** Йонсоновская теория, семантическая модель, совершенная йонсоновская теория, полигон, полигон над циклическим моноидом, полигон над группой, граф, неориентированный граф, примитив, универсал, позитивность, йонсоновский спектр, робинсонвский спектр, семантическое йонсоновское квазимногообразие.